

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală - 9 februarie 2013

Filiera tehnologică: profilul tehnic

Barem Clasa X

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in (-\infty, 1] \\ mx + 4, & x \in (1, \infty) \end{cases}$

a) Pentru $m = -2$ trasați graficul funcției

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care funcția este surjectivă.

Soluție:

- a) trasarea corectă a graficului.....4p
b) Restricția funcției f la intervalul $(-\infty, 1]$ este $2x+4$, o funcție crescătoare care are ca imagine intervalul $(-\infty, 6]$0,5p
Funcția f este surjectivă dacă și numai dacă restricția $mx+4$ a funcției f la intervalul $(1, \infty)$, are ca imagine o mulțime, care reunită cu $(-\infty, 6]$ să ne dea \mathbb{R}0,5p
Este necesar ca $m > 0$ 0,5p
În acest caz imaginea restricției este $(m + 4, \infty)$0,5p
 $m + 4 \leq 6 \Rightarrow m \leq 2$0,5p
Deci $m \in (0, 2]$0,5p

2. Să se calculeze următoarele expresii:

a) $E_1 = \frac{(4^{n+1}-4^n)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-1}-7 \cdot 8^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$ unde $n \in \mathbb{Z}$.

b) $E_2 = \sqrt{28 + 6\sqrt{15 - 4\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}}}} + \sqrt{28 - 6\sqrt{15 + 4\sqrt{10 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}}}}$

Soluție:

a) $E_1 = \frac{(4^{n+1}-4^n)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-1}-7 \cdot 8^{n-2})^{\frac{1}{3}}} = \frac{(4^n)^{\frac{1}{2}} \cdot (4-1)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-2})^{\frac{1}{3}} \cdot (8-7)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^n \cdot \sqrt{3}}{2^{n-2}} = 4\sqrt{3}$3p

b) $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$ deci $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} - 1$.

$10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = 10 + 2\sqrt{7} - 2 = 8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 1)^2$.

$15 - 4\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}} = 15 - 4\sqrt{7} - 4 = 11 - 4\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 2)^2$.

$28 + 6\sqrt{15 - 4\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}}} = 28 + 6\sqrt{7} - 12 = 16 + 6\sqrt{7} = (3 + \sqrt{7})^2$.

$\sqrt{28 + 6\sqrt{15 - 4\sqrt{10 + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}}}} = 3 + \sqrt{7}$2p

Analog cel de-al doilea radical va fi egal cu $3 - \sqrt{7}$1p

Deci expresia $E_2 = 6$1p

3. a) dacă $\log_{20} 2 = a$ să se exprime $\log_{20} 32$ în funcție de a .
 b) dacă $\log_{24} 12 = a$ să se exprime $\log_{64} 27$ în funcție de a .

Soluție:

- a) $\log_{20} 32 = 5a$2p
 b) Folosind formulele de la logaritmi din $\log_{24} 12 = a$ se obține că $\log_2 3 = \frac{3a-2}{1-a}$3p
 iar $\log_{64} 27 = \frac{3a-2}{2(1-a)}$ 2p

4. a) Rezolvați în numere reale ecuația $3^x - 4^x = \sqrt{9^x - 12^x}$.

- b) Rezolvați în numere reale sistemul $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Soluție:

- a) condiții $9^x - 12^x \geq 0, 3^x - 4^x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$1p
 prin ridicare la pătrat se obține $16^x = 12^x$1p
 deci $x=0$ soluție.....1p
 b) $y = 1 - x$
 $3^x + 3^{1-x} = 4$1p
 $3^x + \frac{3}{3^x} = 4$1p
 $3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$1p
 $3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$1p